МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Институт общего и политехнического образования
Академии педагогических наук СССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1968

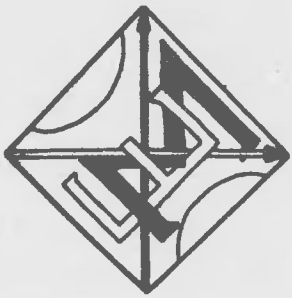
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
Институт общего и политехнического образования
Академии педагогических наук СССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Лекции и задачи

XIII



Издательство Московского Университета
1968

В сборниках "Математическая школа" публикуются учебные материалы московских специализированных школ №№ 2, 7, 444, школы-интерната № 18 при МГУ и Вечерней математической школы при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.Винберг, Е.Б.Дынкин, А.А.Егоров, Т.И.Кузнецова (художник), Ж.М.Раббот (зам. редактора), С.И.Шварцбурд (редактор), И.М.Яглом.

Содержание

Стр.

I. В вечерней математической школе.

С.А.Молчанов. Лекции для 8 классов. 3

Б.В.Григорьев, И.В.Евстигнеев. Летний конкурс ВМШ . . . 9

Конкурсные задачи 40

II. М.Дунская. XXX Московская математическая олимпиада.

II тур 43

III. Материалы вступительных экзаменов 57

Лекции для 8-х классов

С.А.МОЛЧАНОВ

В этом году восьмиклассникам, занимающимся в Вечерней математической школе при МГУ, как обычно, раз в неделю, по субботам, читаются лекции. Ниже приводятся конспекты первых трех лекций.

ЛЕКЦИЯ I.

"СТРАННАЯ ГЕОМЕТРИЯ".

А. Недостаток классического определения расстояния как длины отрезка, соединяющего две точки.

Пример I. Расстояние между двумя городами на поверхности земного шара измеряется не длиной тоннеля, их соединяющего, а длиной дуги, лежащей на поверхности шара.

Задача I. Кратчайшее расстояние на шаре достигается на дуге большого круга.

Пример 2. Турист движется из пункта А в пункт В. На его пути луг и болото. Скорость передвижения по болоту I км/час,

а по лугу 6 км/час. Рассмотрим два возможных пути: АСВ и АДВ. Время на путь АСВ равно $\frac{\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{6}\approx 1{,}64$, на путь АДВ $\frac{1}{1}+\frac{\sqrt{5}}{6}\approx 1{,}37$

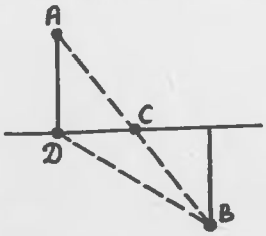


Рис 1.

Хотя с геометрической точки зрения путь АСВ короче чем АДВ, но он менее выгоден. Для туриста естественно называть кратчайшим тот путь, на который затрачивается меньше времени, а за расстояние АВ принимать это наименьшее время.

Задача 2^{X}. Найти "Расстояние" между А и В.

Пример 3. Геометрия города. Город разделен на квадратные кварталы. С точки зрения шофера такси $\mathcal{D}(A,B)=AD+DB$.

Задача 3. Начертить единичную окружность в геометрии города (пренебрегая величиной квартала).

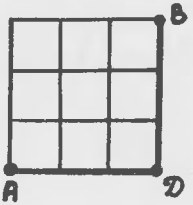


Рис 2.

Задача 4. То же самое для города, у которого горизонтальные улицы асфальтированы $(V_2=80\ \frac{км}{час})$, а вертикальные – нет $(V_2=40\ \frac{км}{час})$.

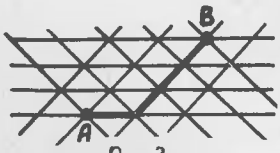


Рис 3.

Пример 4. Марсианский город: кварталы треугольные, имеется три системы улиц.

Задача 5. Начертить единичную окружность в геометрии марсианского города.

Задача 6. Найти длину единичной окружности в геометрии города и геометрии марсианского города.

Общие свойства расстояний. Три аксиомы:

а) $\mathcal{D}(A,A)=0$; в) $\mathcal{D}(A,B)=\mathcal{D}(B,A)$; с) $\mathcal{D}(A,B)+\mathcal{D}(B,C)\geq\mathcal{D}(A,C)$.

Задача 7. Проверить выполнение аксиом метрического пространства для следующей схемы: $\mathcal{D}(A_i, B_j)=A_iO+OB_j=160$; $OA_i=100$; $\mathcal{D}(B_i, B_j)=OB_i+OB_j=120$; $OB_i=60$.

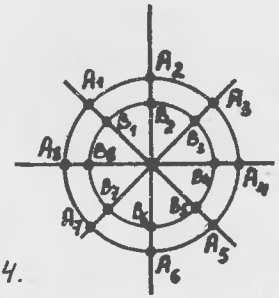


Рис 4.

Начертить "круг" радиуса 100 с центром О. Второй "круг" содержится в первом радиусом 160 с центром В.

ЛЕКЦИИ 2, 3.

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Краткие сведения из стереометрии, которые принимаются без доказательства.

а) Из всякой точки, лежащей вне плоскости, можно опустить единственный перпендикуляр на эту плоскость. Любая прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание перпендикуляра, образует с ним прямой угол.

б) Углом (двугранным углом) между двумя плоскостями называется угол между двумя прямыми, перпендикулярными к ребру, по которому пересекаются эти плоскости, и лежащими в этих плоскостях.

ЛЕММА I. Сечение шара плоскостью - круг. (Сечение, прохо-

дящее через центр шара, называется большим кругом). Через две точки, не лежащие на одном диаметре, проходит единственная дуга большого круга.

ЛЕММА 2. Среди всех дуг сечений, проходящих через точки A и B, наименьшую длину имеет дуга большого круга.

Сферическим треугольником называется фигура, образованная тремя дугами больших кругов.

Связь между трехгранными углами с вершиной в центре шара и сферическими треугольниками.

Углами сферического треугольника называются двугранные углы между соответствующими гранями трехгранного угла. Длинами сторон треугольника называются длины соответствующих больших дуг.

ЛЕММА 3. Каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других сторон.

ТЕОРЕМА I. Кратчайший путь между двумя точками на сфере – – дуга большого круга.

Пусть дан трехгранный угол $SABC$. Трехгранный угол $SA'B'C'$ называется сопряженным к $SABC$, если $SA' \perp SBC$, $SB' \perp SAC$, $SC' \perp SAB$.

Связь между плоскими и двугранными углами сопряженных трехгранных углов.

Два сферических треугольника называются сопряженными, если сопряжены соответствующие им трехгранные углы.

ЛЕММА 4. Если равны два сферических треугольника, то равны и им сопряженные и наоборот.

ТЕОРЕМА 2. Четыре признака равенства сферических треуголь-

ников:

а) по двум сторонам и углу между ними;

б) по стороне и двум прилежащим углам;

в) по трем сторонам;

г) по трем углам (!)

ТЕОРЕМА 3. В сферическом треугольнике против большой стороны лежит больший угол и наоборот. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны и наоборот.

ТЕОРЕМА 4. Площадь сферического треугольника пропорциональна сферическому избытку: $S_{ABC} = (A+B+C-\pi)k$.

ТЕОРЕМА 5. $C = \frac{\pi R^2}{2}$, где R -радиус шара.

СЛЕДСТВИЕ. Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Задачи:

I. Найти г.м.т., равноотстоящих от двух точек А и В.

2. Найти радиус глобуса, пользуясь циркулем, линейкой и вспомогательной плоскостью.

3. Периметр выпуклого сферического многоугольника меньше окружности большого круга.

4. Сумма плоских углов трехгранного угла не превосходит 2π.

5. Сумма углов сферического треугольника больше π.
(Указание: перейти к сопряженному треугольнику).

6. Построить на шаре:

а) точку, диаметрально противоположную данной;

б) большой круг, проходящий через две точки.

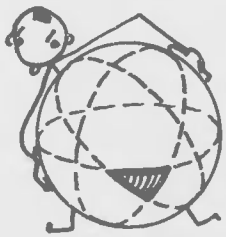
7. Дан глобус, на котором нет градусной сетки, но указаны северный полюс и точка пересечения экватора и гринвичского меридиана. Определить, пользуясь циркулем, линейкой и транспорти-

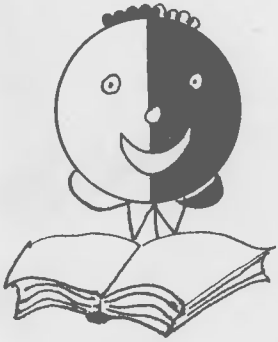
ром, долготу и широту любой точки M .

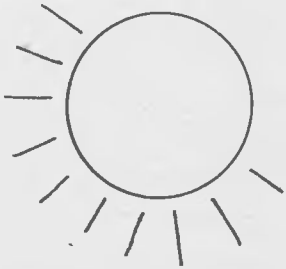
Две конкурсные задачи:

I. Доказать, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

2. Доказать, что биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке.







Летний конкурс ВМШ.

Б.В.Григорьев, И.В.Евстигнеев.

Летний конкурс ВМШ проводился для учеников 7 - 8 и 9 - 10 классов.

Было предложено 20 задач - 10 задач в 7 - 8 кл. и 10 в 9-10.

Необходимо отметить, что по уровню трудности задачи летнего конкурса заметно превосходили задачи, предлагавшиеся на других конкурсах ВМШ. Некоторые задачи, как например, № 6, № 10 для 7-8 классов и № 2, № 9, № 10 для 9-10 классов, требовали для своего решения большой изобретательности, другие - такие как № 1, № 2, № 3 для 7-8 классов и № 1, № 3, № 4 для 9 - 10 классов требовали также и довольно длинного решения.

Большинство задач этого конкурса не являются оригинальными

– авторы выбирали их, используя самую разнообразную математическую литературу, как популярную, так и не популярную.

Хочется отметить сравнительно малое количество работ, присланных на конкурс. По этой причине решено не называть победителей по конкурсу 9 – 10 классов: количество и качество присланных работ не позволяет этого сделать. По конкурсу 7 – 8 классов премии распределились следующим образом:

I премия – не присуждена.

II премия – Думер Илья, ученик 8 кл. 14 спец.школы
Аркадьев Владимир, ученик 8 кл.
Примаков Игорь, ученик 7 кл., 20 школы.

III премия – Уроев Владимир, ученик 8 кл., 29 спец.школы.

Хочется отметить активное участие в конкурсе учеников группы "А".

Так как некоторые задачи конкурса никем решены не были, то авторы не приводят полного решения этих задач, а в нужных местах ссылаются на математическую литературу, доступную подготовленному школьнику. Кроме того, задачи расположены не по порядку.

Задача 4 (7–8 классы). Каково наименьшее число коней, которых нужно расставить на обычной (8×8) шахматной доске так, чтобы все поля были под ударом (поле, на котором стоит конь, считается под ударом)?

Решение. Докажем, что коней должно быть не менее 12. Действительно, ни один конь не может держать под ударом больше одной клетки из тех двенадцати, которые заштрихованы на рис.5. С другой стороны, двенадцати коней достаточно, чтобы держать под ударом все клетки шахматной доски, если их расставить например так, как на рис.6.

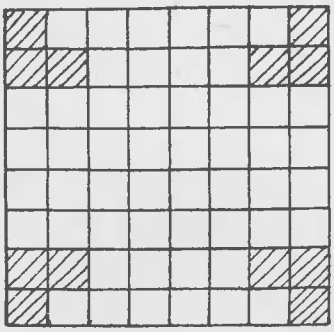


Рис 5.

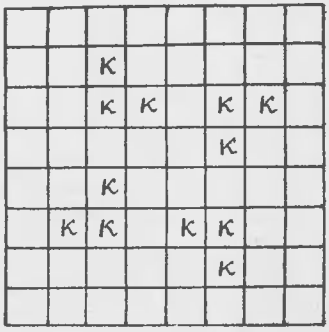


Рис 6.

Задача 6 (7 - 8 классы). В прямоугольник со сторонами a и b вписан четырехугольник так, что на каждой стороне прямоугольника лежит одна вершина четырехугольника, а в четырехугольник - квадрат со стороной I, которая параллельна стороне исходного прямоугольника. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 1$.

Решение. Из каждой вершины четырехугольника опустим перпендикуляр на сторону квадрата. Обозначим длины этих перпендикуляров через h_1, h_2, h_3, h_4 (рис.7) Тогда, очевидно, $a = h_2+h_4+1$; $b = h_1+h_2+1$ и наше неравенство можно записать в виде:

$$\frac{1}{h_1+h_3+1}+\frac{1}{h_2+h_4+1}\geq 1.$$

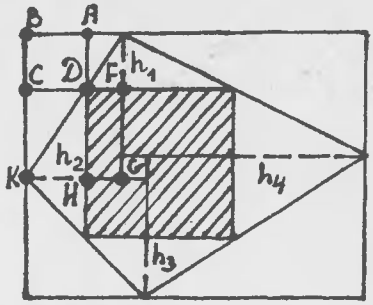


Рис 7.

После несложных преобразований получаем отсюда:

$$h_1h_2+h_2h_3+h_3h_4+h_4h_1\leq 1.$$

Заметим теперь, что $h_1 h_2$ -площадь прямоугольника $ABCD$. Аналогичную геометрическую интерпретацию получают и остальные произведения, входящие в это неравенство.

Докажем, что $S_{ABCD} = S_{FDHG}$. Действительно, треугольники AED и CDK дополняют прямоугольник $ABCD$ до треугольника EBK , а равные им треугольники FED и HDK дополняют $FDHG$, до треугольника EGK , равного EBK .

Таким образом, левая часть нашего неравенства представляет собой сумму площадей 4-х непересекающихся прямоугольников (на рис.7 они заштрихованы), лежащих внутри единичного квадрата, и потому не превосходит I.

Предоставляем читателям установить, когда имеет место знак равенства.

Задача 7 (7-8 классы). Последовательность чисел I,I,2,3,7, 22,... строится по такому правилу: первые два члена равны I, а каждый последующий на I больше произведения двух предыдущих: $x_n = x_{n-2} \cdot x_{n-1} + 1$ $(n \geq 3)$, $x_1 = x_2 = 1$. Встретится ли в этой последовательноти число, делящееся на 4?

Решение. Докажем, что в нашей последовательности не встретится чисел, делящихся на 4.

Для этого напишем несколько первых членов последовательности, а под ними-остатки от их деления на 4:

(I) 1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, 3411, ...

(II) 1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, ...

Докажем, что в последовательноети (II) числа 2,3,3 периодически повторяются. Если нам удастся это сделать, то отсюда немедленно

получится утверждение задачи, так как если в последовательности (П) числа 2,3,3 периодически повторяются, то в частности, в ней не встречается 0, т.е. ни один член последовательности (I) не делится на 4.

Остается строго обосновать замеченное нами свойство последовательности (П). Пусть в ней стоят подряд числа a и b. Это - остатки от деления на 4 чисел первой последовательности, поэтому над ними стоят числа $a+4n$ и $b+4m$. Значит, следующее за ними число последовательности (I) равно $(a+4n)(b+4m)+1=ab+1+4(nb+ma+4mn)$, а последовательности (П) под ним стоит остаток от деления $(ab+1)$ на 4. Таким образом, каждое число последовательности (П) однозначно определяется по двум предыдущим членам последовательности (П). Если повторились 2 подряд стоящих члена последовательности (П), то повторятся и члены стоящие за ними, т.е. последовательность станет периодичеокой. У нас повторились числа 2,3. Это и доказывает наше утверждение.

Задача 9 (7-8 классы). В таблице $(n\times n)$ выписаны некоторые числа. Крестом называется совокупность чисел некоторой строки и некоторого столбца. Известно, что сумма чисел любого креста равна 0. Доказать, что все числа равны 0.

Решение. Утверждение задачи докажем в 3 этапа:

Утверждение I: Сумма чисел в таблице равна 0.

Выпишем числа, стоящие в первом кресте, за ними - стоящие во втором и т.д. до чисел стоящих в последнем кресте и возьмем их сумму. Ясно, что в эту сумму каждое число, стоящее в таблице, войдет $(2n-1)$ раз, т.е. наша сумма равна $(2n-1)\cdot$(сумму чисел таб-

лицы). С другой стороны, т.к. сумма чисел в каждом кресте равна 0, то и рассматриваемая сумма равна 0. Утверждение I доказано.

Утверждение 2: Сумма чисел в любой строке (или столбце) равна 0. Рассмотрим числа, стоящие в крестах, имеющих центр на данной строке (или в данном столбце), и возьмем их сумму.

В эту сумму каждое число, не находящееся в данной строке (или столбце), войдет ровно I раз, а каждое число нашей строки (или столбца) n раз. Таким образом, рассматриваемая сумма равна: (сумме чисел таблицы) + $(n-1)$ (сумму чисел выбранной строки). Т.к., с другой стороны, рассматриваемая сумма равна 0, как и сумма чисел таблицы, то утверждение 2 доказано.

Утверждение 3: Каждое число в таблице равно 0.

Возьмем какое-либо число a в таблице и образуем сумму чисел, входящих в крест, имеющий центр a. Эта сумма равна: (сумма чисел строки, в которой находится a) + (сумма чисел столбца, в котором находится a) $-a$, но, по условию задачи, она равна 0. Отсюда сразу следует утверждение 3.

Задача I (9-10 классы). Доказать, что существуют сколь угодно длинные участки натурального ряда, целиком состоящие из чисел, делящихся на полный квадрат.

Решение. Выберем n произвольных, попарно взаимно-простых чисел $p_1, \dots, p_n$ и построим такое число 3, что 3 делится на p_1^2, $(3+1)$ делится на p_2^2, $(3+2)$ на $p_3^2, \dots$ $\dots$, $3+(n-1)$ – на p_n^2. Пусть $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$;

$A_1 = \frac{P}{p_1}$, $A_2 = \frac{P}{p_2}$, $\dots$, $A_n = \frac{P}{p_n}$.

Заметим, что число A_i делится на все числа $p_1, \dots, p_n$, кроме числа p_i, а числа A_i и p_i – взаимно-просты.

Воспользуемся теперь теоремой, согласно которой для любых двух

взаимно простых чисел a и b существуют такие натуральные m и n, что $am - bn = 1$ (доказательство этой теоремы имеется, например, в книге А.О.Гельфонда "Решение уравнений в целых числах", популярные лекции по математике, вып. 8). Мы, следовательно, можем построить такие натуральные числа s_i, k_i, что $s_i A_i^2 - k_i p_i^2 = 1$, где $i = 1,2,\dots,n$.

Образуем теперь число:

$$S = p_1^2 s_1 A_1^2 + (p_2^2 - 1) s_2 A_2^2 + (p_3^2 - 2) s_3 A_3^2 + \dots + [p_n^2 - (n-1)] s_n A_n^2.$$

Т.к. $A_2^2, A_3^2, \dots, A_n^2$ делятся на p_1^2, то и S делится на p_1^2. Аналогично, т.к. $A_1^2, A_3^2, A_4^2, \dots, A_n^2$ делятся на p_2^2, то $(S+1)$ будет делится на p_2^2 в том и только в том случае, если на p_2^2 делится число:

$$A = (p_2^2 - 1) s_2 A_2^2 + 1.$$

Но, $A = p_2^2 s_2 A_2^2 - (s_2 A_2^2 - 1) = p_2^2 s_2 A_2^2 - k_2 p_2^2 =$
$= p_2^2 (s_2 A_2^2 - k_2)$, т.е. делится на p_2^2. Аналогично, $(S+2)$ делится на p_3^2, $(S+3)$ на p_4^2 и т.д. Этим самым утверждение задачи полностью доказано.

Задача 4 (9-10 классы). Все десятизначные числа, составленные из цифр 1,2,3, записаны в столбик. Затем к этой таблице приписывается еще один столбец, состоящий из цифр 1,2,3, так что каждое число становится одиннадцатизначным. Оказывается, что:

а) к числам $1\dots1$; $2\dots2$; $3\dots3$ приписаны соответственно цифры 1,2,3;

б) если два десятизначных числа отличались во всех десяти разрядах, то они отличаются и в приписанном одиннадцатом разряде.

Доказать, что приписанный столбец совпадает с одним из написанных ранее (то есть либо со столбцом единиц, либо десятков, либо сотен и т.д.).

Решение. Договоримся в этой задаче называть два числа различными, если они отличаются во всех разрядах. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг I. Если число состоит только из двух различных цифр, то к нему может быть приписана лишь одна из них.

Действительно, пусть, например, число состоит из цифр I и 2. Тогда оно различно с числом 33....3, к которому, согласно условию, приписана цифра 3. Значит, цифра 3 к нашему числу приписана быть не может, т.е. к нему может быть приписана лишь цифра I либо 2. Первое утверждение доказано.

Рассмотрим теперь числа, состоящие из двух каких-либо цифр a и b, в которых цифра a встречается 9 раз, а цифра b – только I. Согласно только что доказанному, к такому числу может быть приписана либо цифра a, либо цифра b. Возможны 2 случая: либо к каждому такому числу приписана та цифра, которая встречается в нем 9 раз, т.е. a, либо к какому-нибудь из них приписана цифра b. Разберем сначала вторую возможность. Для определенности будем считать, что к числу $A = 11\ldots12$ приписана цифра 2.

Шаг 2. Если число B состоит только из цифр 2,3, то к нему может быть приписана лишь его последняя цифра.
Прежде всего, если B оканчивается на 3, то оно различно с числом A и потому цифра 2 к нему приписана быть не может. По согласно "шагу I" к нему может быть приписана лишь 2 или 3. Следовательно утверждение "шага 2" в этом случае доказано.

Если же B оканчивается цифрой 2, то образует новое число B', которое получится из B, если в нем всюду цифру 2 заменить на цифру 3, а цифру 3 на цифру 2. (коротко мы это будем записывать так: $B'=B(2\to3;\ 3\to2)$). Число B' состоит из цифр 2 и 3 и оканчивается на 3. Поэтому, как мы только что доказали, к нему приписана цифра 3. Т.к. B различается с числом B', то к B тройка приписана быть не может, т.е. к B приписана цифра 2.

Утверждение полностью доказано.

Шаг 3. Если число B оканчивается на цифру I, то к нему и приписана цифра I.

Образуем два новых числа: $B'=B(1\to2,\ 2\to3,\ 3\to2)$ и $B''=B(1\to3,\ 2\to3,\ 3\to2)$. Числа B' и B'' состоят из цифр 2,3, различны с числом B, оканчиваются на цифры 2 и 3 соответственно, которые и приписаны к ним, согласно утверждению "шага 2". Но тогда к B нельзя приписать ни 2, ни 3, т.е. к B действительно приписана I.

Шаг 4: К любому числу B приписана его последняя цифра. Случай, когда B оканчивается на I, разобран в "шаге3". Пусть теперь B оканчивается, например, на 2. Образуем числа B' и B'': $B'=B(1\to3,2\to1,3\to2);\ B''=B(1\to3,2\to3,3\to2)$. Число B' оканчивается на I, которая к нему и приписана; число B'' состоит только из цифр 2,3 и оканчивается 3, поэтому ("шаг 2"!) к нему приписана цифра 3. Следовательно, к B не может быть приписана ни I, ни 3, т.к. оно различно с числами B' и B''. Это нам и надо было доказать.

Итак, вторая возможность (см. "шаг I") полностью разобрана. Мы показали, что в этом случае приписанный отсек совпадает со

столбцом с номером „i" , если к числу $a \ldots aba \ldots a$ (цифра b стоит на i-ом месте) приписана b . Остается рассмотреть первый случай, когда ко всякому числу вида $a \ldots aba \ldots a$ (I цифра b и 9 цифр a) приписана цифра „a" . Мы покажем, что это предположение приводит к противоречию. Этим самым утверждение задачи будет полностью доказано.

Шаг 5. Если в числе некоторая цифра встречается лишь один раз, то она не может быть к нему приписана.

Пусть, например, в числе B цифра I встречается только один раз. Положим: $B' = B(1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 1)$. В числе B' 9 цифр – единицы, и одна цифра 2. Согласно нашему предположению, к числу B' приписана цифра I. Т.к. B и B' различны, то к числу B единица приписана быть не может.

Шаг 6. Если в числе некоторая цифра встречается не более двух раз, то она не может быть к нему приписана.

Пусть, например, в числе B цифра I встречается только 2 раза. Образуем B' :

$B' = B(2 \to 1, 3 \to 1)$, первая единица, входящая в $B \to 2$, а вторая $\to 3$). В числе B' цифры 2 и 3 встречаются только по I разу. Поэтому к B' может быть приписана лишь I ("шаг 5"). Следовательно, к B единица не может быть приписана.

Шаг 7. Если в числе некоторая цифра встречается не более 4-х раз, то она не может быть приписана к нему.

Пусть, например, в числе B цифра I встречается 3 или 4 раза. Положим:

$B' = B(2 \to 1, 3 \to 1$, первые 2 единицы, входящие в $B \to 2$, остальные $\to 3$). В числе B' цифры 2 и 3 встречаются не более 2-х раз каждая, поэтому к нему может быть приписана лишь I

("шаг 6"). Значит, к B единица не может быть приписана.

Шаг 8. Рассмотрим число III2223333. Согласно утверждению "шага 7", к нему не может быть приписаны ни I, ни 2, ни 3. Мы пришли к противоречию, поэтому, действительно, та возможность, о которой говорилось в "шаге 4", не может иметь места.

Утверждение задачи полностью доказано.

Задача 6 (9-I0 классы). На плоскости задано n точек. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и окружность радиуса I. Доказать, что на ней найдется такая точка A, что сумма квадратов расстояний от точки A до точек $A_1, \ldots, A_n$ не меньше n.

Решение.

Лемма. На плоскости имеется такая точка O, что сумма векторов

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \cdots + \overline{OA_n} = 0$$

Обозначим через S_O сумму векторов $\overline{OA_1}, \ldots, \overline{OA_n}$. Посмотрим, как связаны между собой S_O и S_{O_1} для двух разных точек O и O_1.

$$S_O = \overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_n} = (\overline{OO_1} + \overline{O_1A_1}) + \cdots + (\overline{OO_1} + \overline{O_1A_n}) =$$

$$= n \cdot \overline{OO_1} + \overline{O_1A_1} + \cdots + \overline{O_1A_n} = n \cdot \overline{OO_1} + S_{O_1}.$$

Отсюда вытекает, что если мы выберем сначала произвольную точку O_1, а потом рассмотрим точку O, такую, что $\overline{OO_1} = -\frac{S_{O_1}}{n}$, то $S_O = 0$. Лемма доказана.

Поместим теперь в такую точку O начало координат и будем рассматривать векторы $\overline{OA_i}$ как комплексные числа z_i. Если z – комплексное число, изображаемое вектором $\overline{OA}$, то сумма

квадратов расстояний от точки A до точки A_i равна:

$$S = |z-z_i|^2+\cdots+|z-z_n|^2=(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)+\cdots$$

$$\cdots+(z-z_n)(\bar{z}-\bar{z}_n)=n\cdot z\cdot\bar{z}-z(\bar{z}_1+\cdots+\bar{z}_n)-$$

$$-\bar{z}(z_1+\cdots+z_n)+z_1\bar{z}_1+\cdots+z_n\bar{z}_n,$$

где через $\bar{z}$ мы, как обычно, обозначаем число, комплексно сопряженное с числом z. В силу нашего выбора точки O, сумма $z_1+\cdots+z_n=0$, а значит и $\bar{z}_1+\cdots+\bar{z}_n=0$. Мы получаем:

$$S = nz\bar{z}+z_1\bar{z}_1+\cdots+z_n\bar{z}_n \geqslant nz\bar{z}.$$

Т.к. окружность в условии задачи имеет радиус I, то на ней найдется точка, расстояние которой до O не меньше I. Для этой точки: $z\bar{z}\geqslant 1$ и поэтому:

$$S\geqslant n.$$

Знак равенства будет иметь место лишь в том случае, когда все точки $A_1, \ldots, A_n$ совпадают с центром окружности.

Задача 9 (9-I0 классы). Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2 \\ \cos x_2 = x_3 \\ \text{- - - - - -} \\ \cos x_{n-1} = x_n \\ \cos x_n = x_1 \end{cases} \quad ?$$

Решение. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Уравнение $\cos x = x$ имеет единственное решение $x = x_0$. Это легко видеть из графика (рис. 8).

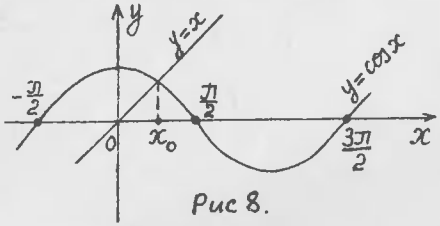


Рис 8.

Чтобы разобрать случай любого n, нам потребуется неравенство: $|\cos\alpha - \cos\beta| \le |\alpha - \beta|$, причем знак равенства имеет место лишь при $\alpha = \beta$. Доказав это неравенство, дальше можно рассуждать так.

Рассмотрим данную нам систему и вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ введем новые неизвестные: $y_1 = x_1 - x_0$, $y_2 = x_2 - x_0$, $\ldots$, $x_n = x_n - x_0$, где x_0 -единственное решение уравнения $\cos x = x$. Наша система примет вид:

$$\begin{cases} \cos(y_1 + x_0) = y_2 + x_0 \\ \cos(y_2 + x_0) = y_3 + x_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos(y_n + x_0) = y_1 + x_0 \end{cases}$$

Мы получаем, что $y_2 = \cos(y_1 + x_0) - x_0 = \cos(y_1 + x_0) - \cos x_0$ и потому $|y_2| = |\cos(y_1 + x_0) - \cos x_0| \le |y_1 + x_0 - x_0| = |y_1|$.
Совершенно аналогично получаются и остальные неравенства:

$$|y_1| \ge |y_2| \ge \cdots \ge |y_n| \ge |y_1|.$$

Мы видим, что всюду должны стоять знаки равенства, что возможно лишь при $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$. Значит, единственным решением нашей системы является: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_0$.

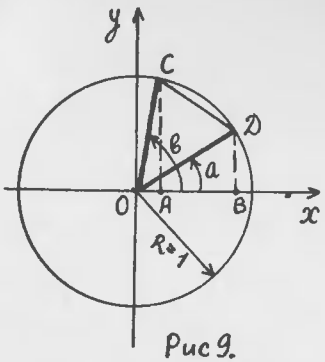


Рис 9.

Остается доказать неравенство $|\cos a - \cos b| \le |a-b|$. Воспользуемся тригонометрическим кругом (рис.9). Как видно из рисунка, $(\cos a - \cos b)$ -длина отрезка AB. С другой стороны, $(b-a)$ - длина дуги $\breve{CD}$. Но, очевидно, $\breve{CD} \ge CD \ge AB$, и знак равенства имеет место лишь при $C=D$. Неравенство доказано.

Примечание. Мы разобрали лишь случай, когда a и b находятся в первой четверти. Однако, остальные случаи разбираются вполне аналогично.

Задачи IO (7-8 классы) и 2, IO (9-IO классы).

№ IO (7-8 классы). Решить в целых числах уравнение $x^3+x^2-2x-1=y^2$.

№ 2 (9-IO классы). Доказать, что не существует таких целых чисел x и y, что $x^3+7=y^2$.

№ IO (9-IO классы). Доказать, что не существует таких натуральных чисел x,y,z,t, что $1967(x^2+y^2)=z^2+t^2$.

Решение. В каждой из этих задач требуется решить в целых числах некоторое уравнение. Эти уравнения выглядят так (для удобства решения мы их немного преобразовали):

(I) $x(x^2+x-2)=y^2+1^2$.

(2) $x^3+8=y^2+1^2$.

(3) $1967(x^2+y^2)=z^2+y^2$

Общим во всех этих уравнениях является то, что их правые части представляют собой суммы квадратов двух целых чисел. Не всякое целое число можно представить в виде суммы двух квадратов. Выяс-

ним, например, какие простые множители может иметь такое число. Для этого удобно воспользоваться так называемой малой теоремой Ферма (см., например, Шклярский и др. "Избранные задачи и теоремы элементарной математики", часть I, арифметика и алгебра). Она формулируется следующим образом.

Если число p -простое и a не делится на него, то a^{p-1} дает при делении на p остаток I.

Пусть теперь некоторое целое число N вида a^2+b^2 делится на простое число $p \neq 2$. Если остаток от деления a^2 на p равен r, то остаток от деления b^2 на p равен $-r$. Если предположить, что a (а, следовательно, и b) на p не делится, то, по теореме Ферма, остаток от деления a^{p-1} на p равен I. Но, $a^{p-1}=(a^2)^{\frac{p-1}{2}}$, (p -нечетно!), потому остаток от деления $r^{\frac{p-1}{2}}$ на p равен I. Теорема Ферма, примененная к числу b, дает, что $(-r)^{\frac{p-1}{2}}$ при делении на p дает в остатке I. Отсюда вытекает, что $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ при делении на p дает в остатке I, что возможно лишь когда $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$, т.е. $\frac{p-1}{2}$ -четное число: $\frac{p-1}{2}=2k$, откуда $p=4k+1$. Нечетные простые числа p имеют вид либо $4k+1$ (например, 5), либо $4k+3$ (например, 7). Мы показали, что если $N=a^2+b^2$ делится на p, то либо $p=4k+1$, либо $p=2$, либо и a, и b делятся на p. Сформулируем полученный результат в виде леммы:

Лемма: Если число $N=a^2+b^2$ делится на простое p вида $4p+3$, то и a, и b делятся на p.

Проще всего эту лемму применить к уравнению (3). С него мы и начнем.

Заметим, во-первых, что I967 делится на 7, а во-вторых, что 7 - простое число вида $4k+3$.

Предположим, что уравнение (3) имеет решения. Выберем тогда среди них то, у которого z -наименьшее положительное (ясно, что z не может быть равно 0). Мы видим, что, согласно Лемме, раз z^2+t^2 делится на 7, то и z, и t делятся на 7; $z=7z_1$; $t=7t_1$, а уравнение имеет вид: $281(x^2+y^2)=7(z_1^2+t_1^2)$. Теперь $281(x^2+y^2)$ делится на 7, но так как 281 на 7 не делится, то x^2+y^2 делится на 7, и, следовательно, согласно Лемме, x и y делятся на 7: $x=7x_1$; $y=7y_1$, а уравнение имеет вид: $1967(x_1^2+y_1^2)=z_1^2+t_1^2$. Значит, x_1, y_1, z_1, t_1 - снова решение исходного уравнения. Мы пришли к противоречию, т.к. $z_1=\frac{z}{7}<z$, а мы предположили, что z - минимально возможное. Значит уравнение (3) решений не имеет.

Переходим теперь к уравнениям (I) и (2). Здесь будет полезно сделать 2 замечания.

Во-первых, произведение двух чисел вида $4a+1$ и $4b+1$ снова является числом вида $4c+1$, т.к. при произведении чисел остатки от их деления на 4 перемножаются. Отсюда следует, что если целое число N имеет вид $4k+3$, то оно делится хотя бы на одно простое число вида $4n+3$. Исключение (тривиальное) представляет число (-1), которое имеет вид $4k+3$ $(-1=-4+3)$, но не делится вообще ни на какое простое число.

Во-вторых, число y^2+1 не может делится на 4. Действительно, для того, чтобы оно было четным, надо, чтобы у было нечетным, $y=2k+1$, но тогда $y^2+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k)+2$, и при делении этого числа на 4 мы получаем в остатке 2.

Рассмотрим теперь уравнение (I):

$$x(x^2+x-2)=y^2+1.$$

Согласно только что сделанному замечанию, правая часть (I) не может делиться на 4. Однако, если x имеет вид $4k$, $4k+1$ или $4k+2$, то левая часть на 4 делится. (Проверьте!). Значит, всякое x, удовлетворяющее этому уравнению, должно иметь вид $4k+3$. Но, ввиду нашего первого замечания, в этом случае левая часть либо делится на простое число p вида $4k+3$, что невозможно в силу леммы, либо $x=-1$. В последнем случае получаем $y^2+1=2$, откуда $y=\pm 1$. Значит наше уравнение имеет 2 решения: $x=-1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$.

Рассмотрим уравнение (2):

$$x^3+8=y^2+1.$$

Если x -четно, то левая часть делится на 8, а правая, как мы видели, не может делиться даже на 4. Этот случай отпадает. Значит x -нечетно, т.е. либо $x=4k+1$, либо $x=4k+3$. Но, $x^3+8=(x-2)(x^2-2x+4)$ и если $x=4k+1$, то $x+2=4k+3$, а если $x=4k+3$, то $x^2-2x+4=16k^2+24k+9-8k-6+4=4(4k^2+4k+1)+3=4\beta+3$. Поэтому, как объяснялось выше, либо $x=-1$, либо $x^2-2x+4=-1$. Второе равенство вообще невозможно, т.к. уравнение $x^2-2x+5=0$ не имеет действительных корней, а из первого получается, что $y^2=6$, что также невозможно. Значит, уравнение (2) решений не имеет.

Задачи № 2,3 (7-8 классы) и № 3,5 (9-10 классы).

№ 2 (7-8 классы). На конкурсе ВМШ каждую задачу правильно решило 5 человек и каждый участник правильно решил 5 задач. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый участник конкурса будет разбирать ровно одну из решенных им задач и все задачи будут разобраны.

№ 3 (7-8 классы). Квадрат разбит на 100 равновеликих частей двумя способами. Доказать, что можно выбрать 100 точек так, чтобы в каждой части первого разбиения и в каждой части второго было ровно по одной точке.

№ 3 (9-10 классы). Квадрат со стороной 1 разбит двумя способами на 100 равновеликих частей. Доказать, что существует 100 многоугольников, площадь каждого из которых не меньше 0, 0001, такие, что в каждой части первого разбиения и в каждой части второго разбиения находится ровно по одному многоугольнику.

№ 5 (9-10 классы). Каждый член бригады садоводов собрал по 1000 яблок. Эти яблоки уложены в корзины по 1000 яблок в каждой корзине. Доказать, что можно так распределить эти корзины между садоводами, что каждому достанется корзина, в которой есть некоторое количество яблок, собранных им самим.

Решение. Прежде всего, сформулируем эти задачи так, чтобы стало ясно, что все они сводятся по существу к одному и тому же утверждению.

Возьмем сначала задачу № 2 для 7 - 8 классов. Пусть в конкурсе принимало участие n человек. Из условия ясно, что всего задач было предложено также n. Нарисуем квадратную таблицу $n \times n$ и сопоставим ее строки участникам конкурса, а столбцы - предложенным задачам. В каждую клетку этой таблицы впишем либо число 0, либо число $\frac{1}{5}$, в зависимости от того решил или нет данный участник данную задачу. Тогда, по условию, сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце таблицы будет равна 1. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать в каждой строке таблицы по 1 ненулевому (т.е. равному $\frac{1}{5}$) числу, так чтобы все они оказались в разных столбцах.

Точно такую же переформулировку допускает и задача № 5 для 9–10 классов (надо только в таблице писать не число $\frac{1}{5}$, а $\frac{1}{1000}$). Обратимся теперь к двум оставшимся задачам: № 3 для 7–8 кл. и № 3 для 9–10 кл. Ясно, что вторая задача – это более сильная форма первой, ее то мы и будем решать. К несчастью, в формулировку этой задачи вкралась неточность: вместо $\frac{1}{10.000}$ надо читать $\frac{1}{1.000.000}$, иначе утверждение будет неверно.

Снова нарисуем квадратную таблицу, на этот раз размером 100 × 100 клеток, и сопоставим ее строки многоугольникам первого разбиения, а столбцы – второго. В каждую клетку таблицы впишем площадь общей части соответствующих многоугольников первого и второго разбиения (если они не пересекаются, то впишем 0). Тогда сумма чисел в любой строке (столбце) равна площади соответствующего многоугольника I-ого разбиения (второго), т.е. $\frac{1}{100}$. Чтобы привести это в соответствие со свойствами предыдущих таблиц, умножим каждое стоящее в ней число на 100. тогда снова получится таблица, у которой сумма чисел любой строки и любого столбца равна I. Нам нужно опять выбрать в каждой строке такое число, чтобы все они, во-первых, были не меньше, чем $100 \cdot \frac{1}{1.000.000} = \frac{1}{10.000}$, а, во-вторых, стояли бы в разных столбцах.

Итак, для решения всех 4-х задач достаточно доказать теорему:

ТЕОРЕМА. Если дана таблица $n \times n$, в которой написаны неотрицательные числа, причем сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна I, то из каждой строки можно выбрать по I числу, так чтобы, во-первых, все они находились в разных столбцах, а во-вторых, все они были не меньше, чем $P_n = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2}, & \text{если } n \text{ нечётно} \\ \frac{4}{n(n+1)}, & \text{если } n \text{ чётно} \end{cases}$ $\left(P_{100} = \frac{1}{2550} > \frac{1}{10.000}\right)$

Доказательство.

Ясно, что если выбор о котором идет речь в теореме, возможен, то из каждого столбца будет взято ровно по I числу (т.к. количество строк равно количеству столбцов). Переставим теперь столбцы нашей таблицы так, чтобы первым стоял тот, в котором выбранное число находится в первой строке, вторым - тот в котором это число находится во второй, и т.д. Тогда выбранные числа будут находится на диагонали нашей таблицы, которая идет из левого верхнего угла в правый нижний. Утверждение теоремы теперь можно переформулировать так: можно переставить столбцы таблицы так, чтобы все числа, стоящие на ее диагонали, были не меньше, чем ρ_n. Пусть a -некоторое число из таблицы. Мы будем говорить, что a -минимальное, если можно так переставить столбцы, чтобы a находилось на диагонали и было не больше, чем все другие числа, стоящие на ней. Построим по данной таблице новую следующим образом: в новой таблице каждое число равно либо 0, либо I, причем 0 оно равно тогда и только тогда, когда соответствующее число исходной таблицы было минимальным. Основой доказательства нашей теоремы будет следующая лемма:

ЛЕММА

Пусть дана таблица $n \times n$, в клетках которой написаны числа 0 и I. Тогда, либо в ней можно так переставить строки и столбцы, чтобы все элементы, стоящие на диагонали равнялись I, либо так, чтобы все элементы, стоящие в прямоугольнике размером $a \times a$ клеток, где $a + b = n + 1$, находящемся в ее левом верхнем углу, равнялись 0 (см. рис.10).

Предположим, что эта лемма доказана и покажем, как ее применить к доказательству нашей теоремы.

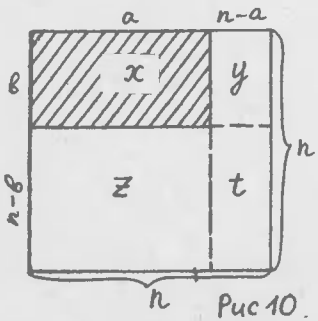


Рис 10.

В построенной нами новой таблице заведомо не может иметь место первая возможность, о которой говорится в лемме. Действительно, как бы мы не переставляли местами строки и столоцы исходной таблицы, среди элементов, стоящих на диагонали хоть один будет минимальным, т.е. во второй таблице хоть один элемент будет 0. Поэтому имеет место вторая возможность. Переставим тогда строки и столбцы исходной таблицы в соответствии с утверждением леммы. В заштрихованном на рис. прямоугольнике на всех местах будет стоять минимальные элементы. Докажем, что сумма чисел в этом прямоугольнике не меньше I. Обозначим через x, y, z, t сумму чисел, стоящих в прямоугольниках, показанных на рис.10. Т.к. сумма чисел любой строки и любого столбца равна I, то

$$y+t=n-a,\quad x+y=в,\qquad \text{откуда:}$$

$$x=в-y,\ y=n-a-t \qquad \text{и поэтому:}$$

$$x=в-(n-a-t)=(a+в-n)+t=1-t\geq 1.$$

Всего в нашем прямоугольнике ab чисел. Раз их сумма равна I, то хотя бы одно из них не меньше, чем $\frac{1}{ab}$. Используя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, мы получим: $ab\leq\left(\frac{a+в}{2}\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, а т.к. a и $в$ целые, то для четных n мы получаем, что $ab\leq\frac{n(n+2)}{4}$. Значит, хоть один элемент прямоугольника не меньше чем ρ_n (см. формулировку теоремы). Возьмем этот элемент. По условию, он минимальный.

Значит, можно так переставить местами строки и столбцы, чтобы этот элемент попал на диагональ и был там наименьшим. Значит, все элементы, стоящие на диагонали, будут не меньше, чем p_n, что и требовалось доказать.

Переходим теперь к доказательству леммы.

Ради экономии места мы не приводим его целиком, а ссылаемся на так называемую "теорему о различных представителях", доказательство которой имеется, например, в книге Г.Дж.Райзера "Комбинаторная математика" изд. "Мир" 1966 г. стр. 52, теорема I.I гл. 5 (эта книга в целом не элементарна, но доказательство данной теоремы, приведенное в ней, доступно подготовленному школьнику).

Теорема о различных представителях может быть сформулирована следующим образом:

Пусть дана таблица $n \times n$, составленная из 0 и I. Для того, чтобы можно было так переставить строки и столбцы этой таблицы, чтобы все элементы, стоящие на диагонали равнялись I, необходимо и достаточно, чтобы для любого k, $1 \le k \le n$ из любых k строк этой таблицы можно было выбрать k единиц, стоящих в разных столбцах.

Пусть в предположениях нашей леммы (см. ее формулировку) не удается переставить строки и столбцы таким образом, чтобы на диагонали стояли I. Тогда, в соответствии с приведенной только что теоремой, существуют такие k строк, что из них нельзя выбрать k единиц из разных столбцов, т.е. единицы, стоящие в этих строках, занимают не более $(k-1)$ столбцов, а значит, в остальных $n-(k-1)$ столбцах все элементы из данных k строк - нули. Переставим тогда строки и столбцы таблицы так, чтобы найденные k строк и $n-(k-1)$ столбцов были первыми. Тог-

да в левом верхнем углу таблицы возникнет прямоугольник, состоящий из одних нулей, размером $k \times (n-k+1)$, что и требовалось доказать.

Решение всех 4-х задач закончено.

Задача № I (7-8 классы).*) Собралось 9 человек. Доказать, что среди них найдутся или трое попарно знакомых между собой людей, или четверо попарно незнакомых.

Решение. Из любых четырех человек либо трое попарно знакомы между собой, либо двое между собой незнакомы.

Доказательство. Очевидно, так как если все между собой знакомы, то имеет место случай I, а если не все, то случай 2.

ЛЕММА 2. Если каждый из шести человек, знаком ровно с двумя другими, то найдутся либо трое попарно знакомых между собой людей, либо трое попарно незнакомых.

Доказательство. Разобьем всех людей на компании. Двух людей a и b мы поместим в одну компанию, если они либо непосредственно знакомы между собой, либо связаны цепочкой знакомых (т.е. „a" знаком с „c", „c" с „d" и т.д. „e" знаком с „b"). Т.к. каждый человек знаком ровно с двумя другими, то в пределах одной компании знакомства выглядят так: I-ый знаком со 2-ым, 2-ой с 3-им, . . . , $(k+1)$-ый с k-ым, k-ый с I-ым, а остальные пары не знакомы между собой. Т.к. всего имеется 6 человек и каждый знаком ровно с 2 другими, то имеется либо 2 компании по 3 человека, либо I из 6 человек. В первом случае 3 человека из одной компании попарно знакомы между собой, во втором I-ый, 3-ий и 5-ый между собой попарно не знакомы. Утверждение доказано.

ЛЕММА 3. Из любых шести человек либо трое попарно знакомы между собой, либо трое попарно незнакомы.

*) Приводимое решение любезно сообщено авторам Н.Б.Васильевым и В.Л.Гутенмахером.

Предположим, что нет трех людей, попарно знакомых между собой. Рассмотрим следующие возможности.

а) Хотя бы один из данных шести человек знаком с тремя (или большим количеством) человек.

Пусть I-ый знаком со 2,3 и 4-ым. Если бы 2-ой и 3-ий были знакомы, то (I,2,3) - трое попарно знакомых и мы приходим к противоречию с нашим предположением. Значит, 2 и 3 - не знакомы. Аналогично (2 и 4) и (3 и 4) тоже не знакомы между собой. Значит, 2,3,4 образуют тройку попарно не знакомых людей.

б) Хотя бы один из данных шести человек знаком только с одним (или вообще ни с кем).

Пусть первый знаком только со вторым. Из 4-х человек: 3,4, 5,6, согласно Лемме I, найдутся двое незнакомых (пусть 3 и 4). Т.к. I с ними также не знаком, то утверждение доказано.

в) каждый знаком ровно с двумя другими.

Этот случай разобран в Лемма 2.

Лемма 4. Не существует 9 человек таких, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими.

Предположим, что такие люди нашлись и подсчитали число знакомств между ними. Т.к. их 9 и каждый знаком с тремя другими, то количество знакомств равно $9 \cdot 3 = 27$, но в действительности оно вдвое меньше, т.к. при таком подсчете каждое знакомство мы считаем два раза. Значит количество знакомств $\frac{27}{2} = 13,5$ - чего быть не может.

Доказательство утверждения задачи. Рассмотрим следующие возможности.

а) Хотя бы один из данных девяти человек знаком с четырьмя или большим количеством людей. Пусть I-ый знаком со 2-ым, 3-им,

4-ым и 5-ым. Такие же рассуждения, как в пункте а) леммы 3 показывают, что тогда либо имеется трое попарно знакомых между собой людей, либо 2,3,4,5 между собой не знакомы и значит, образуют четверку попарно не знакомых между собой людей.

б) Хотя бы один из данных 9 человек знаком не более, чем с двумя другими.

Пусть I-ый знаком лишь со 2-ым и 3-им. Из 6 человек: 4,5,6, 7,8,9, согласно лемме 3. найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Во втором случае эти трое вместе с I-ым образуют четверку попарно не знакомых между собой людей.

в) Каждый знаком ровно с тремя другими.

Это невозможно ввиду Леммы 4.

Утверждение задачи полностью доказано.

Задача № 8 (7-8 классы). В каждый из кружочков фигуры (см. рис.11) вписано одно из чисел I,2,..., I5. Какова вероятность того, что каждое число в таблице больше обоих чисел, стоящих под ним?

Рис 11.

Решение. К сожалению, авторы не смогли найти достаточно интересное решение этой задачи. Как показывает непосредотвенный подсчет (разумеется, не без некоторых "хитростей"), вероятноть, о которой идет речь в задаче, равна $\frac{1}{3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 9}$. Есть предположение, что когда последняя строка таблицы имеет „ n " кружочков (и записываются числа от I до $\frac{n(n+1)}{2}$), то вероятность $P_n = \frac{1}{3^{n-1} \cdot 5^{n-2} \cdot 7^{n-3} \cdots (2n-1)}$. Непосредственный подсчет

показывает, что это верно для $n=1,2,3,4,5$. Верно ли это для любого „n", авторам неизвестно.

Задача № 5 (7-8 классы). Из квадрата 3×3 см вырежем квадрат 2×2 см, имеющий общую вершину с первым. Доказать, что такими "уголками" нельзя замостить никакого прямоугольника.

Решение. Предположим, что нам удалось замостить "уголками" некоторый прямоугольник. Угловая клетка I может быть покрыта двумя способами (см. рис.12 а) и б)). Легко видеть, что в случае а) может быть покрыта лишь одна из клеток 2 и 3. Таким образом, случай, показанный на рис. а), невозможен. В случае, показанном на рис.12б), клетка 2 может быть покрыта либо как на рис.13, либо как на рис.14.

Клетки 4 и 5 могут быть покрыты единственным способом (см. рис.13)Отсюда следует, что хотя бы одна из клеток 6,7,8 не может быть покрыта.

На рис14одна из клеток 9 и IO не может быть покрыта.

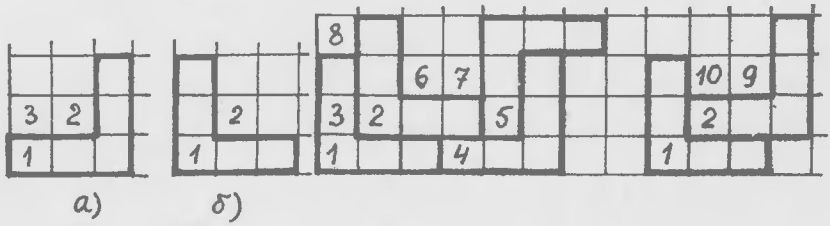


Рис 12. Рис 13. Рис 14.

Задача № 7 (9-IO классы). Выбрать из последовательности I,2,...I967 наибольшее количество чисел так, чтобы все их попарные суммы делились на 26.

Решение. Пусть K -максимальное число членов в последо-

вательностях, удовлетворяющих условию задачи. Пусть $N=\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ – одна из таких последовательностей. Заметим прежде всего, что в последовательности N есть ровно одно число вида $26s+13$ и равно одно число вида $26p$. Обозначим через $n_1, \dots, n_s$ такие попарно различные числа, что а) для каждого ℓ найдется член последовательности N_m, где $N_m \equiv n_\ell \pmod{26}$; и б) $0 \le n_i < 26$. Из вышесказанного ясно, что среди $u_1, \dots, u_s$ есть 0 и 13.

Легко видеть, что если $S > 14$, то найдутся 2 числа n_i и n_j, дающие в сумме 26, поэтому среди членов последовательности N найдутся два, сумма которых делится на 26. Следовательно, в силу максимальности k, $S=14$. Если $n_p \neq 13$ и $n_p \neq 0$ то среди $N_1, \dots, N_k$ есть все числа вида n_p+26r, где $r \ge 0$ и $n_p+26r \le 1967$. Действительно, $n_p+26r_1+n_p+26r_2 = 2n_p+26t$, а $2n_p$ не делится на 26. Кроме того, $n_i+26k_1+n_j+26k_2$ не делится на 26 при $i \neq j$, поскольку $n_i+n_j \neq 26$. Так как $1967 = 26 \cdot 75 + 17$, то в последовательности чисел вида n_d+26r $(r \ge 0, n_d+26r \le 1967)$ имеетоя 76 членов при $n_d \le 17$ и 75 членов при $n_d > 17$. Ввиду максимальности k отсюда следует, что $n_1, \dots, n_{14} \le 17$. Обратно, любой набор чисел $n_1, \dots, n_{14}$, где $n_i \le 17$, $n_1 = 0$, $n_{14} = 13$ определяет последовательность $N_1, \dots, N_k$, удовлетворяющую условию задачи и состоящую из чисел

$$26r_0,\ 26q_0+13,\ 26q_i+n_i \quad (\text{где } i=2, \dots, 13,\ q_i \ge 0 \text{ и } 26q_i+n_i \le 1967.)$$

В качестве $n_1, \dots, n_{14}$ можно взять, например, $0, 1, 2, \dots, 13$. Из вышесказанного следует, что $k = 2+76 \cdot 12 = 914$.

Задача № 8 (9–10 классы). Уголком $n \times m$ называется

фигура, полученная из прямоугольника размером $n \times m$ удалением прямоугольника $(n-1) \times (m-1)$, имеющего с первым общую вершину. При каких n и m такими уголками можно замостить:

а) какой-либо прямоугольник;

б) какую-либо бесконечную полосу;

в) всю плоскость?

Решение. а) Предположим, что некоторый прямоугольник замощен уголками $n \times n$, где $n > 2$. Угловая клетка 1 может быть покрыта двумя способами (рис. 15 и 16).

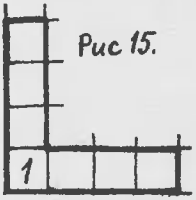


Рис 15.

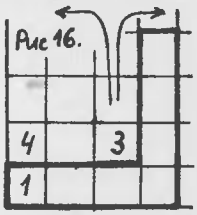


Рис 16.

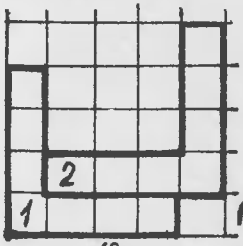


Рис 17.

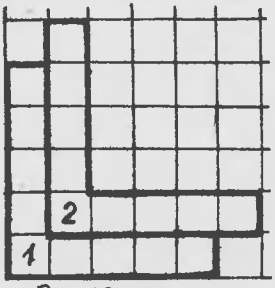


Рис 18.

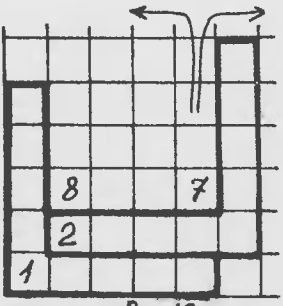


Рис 19.

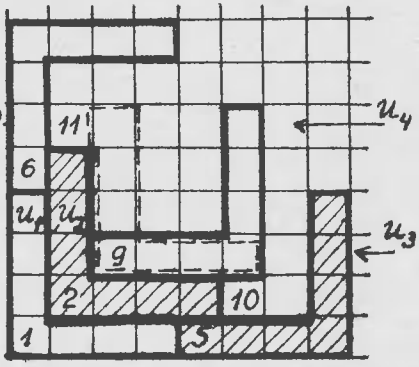


Рис 20.

На рис. 16 одна из клеток, 3 и 4, не может быть покрыта, поскольку $n > 2$. Клетка 2 может быть покрыта либо как на рис. 17, либо как на рис. 18. Если ситуация такая, как на рис. 17, то хотя бы одна из клеток, 7 или 8, не может быть покрыта (см.

рис. 19). В олучае рио. 18 рассмотрим клетки 5 и 6. Они могут быть покрыты единственным образом (ом. рио. 20) При любом расположении уголка u_4 , накрывающего клетку 9, одна из клеток IO,II не может быть накрыта. Таким образом, мы показали, что никакой прямоугольник нельзя замостить уголками $n \times n$ при $n > 2$.

б) Покажем, что никакую бесконечную полосу нельзя замостить уголками $n \times n$, где $n > 3$. (Замощение полосы шириной 5 уголками 3×3 показано на рис. 21). Заметим, прежде всего, что любой уголок, прилегающий к краю полосы, может быть расположен только так, как на рис. 22 Случай рис. 23 невозможен, поскольку хотя бы одна из клеток 2 и 3 не может быть покрыта. Нетрудно показать, что клетка 4 может быть покрыта только так, как на рис. 22 Рассмотрим клетку 5.

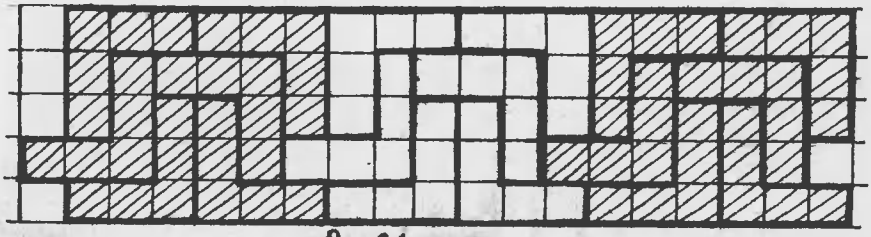


Рис 21.

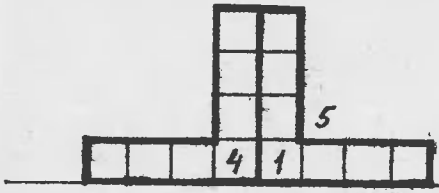


Рис 22.

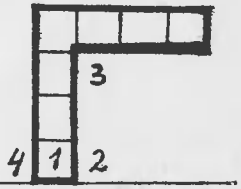


Рис 23.

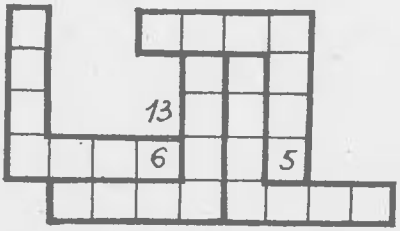


Рис 24.

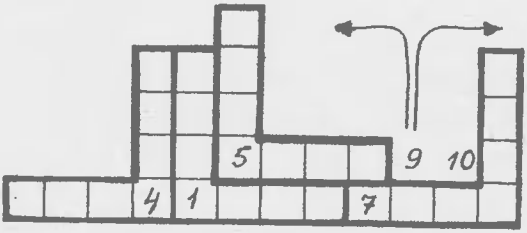


Рис 25.

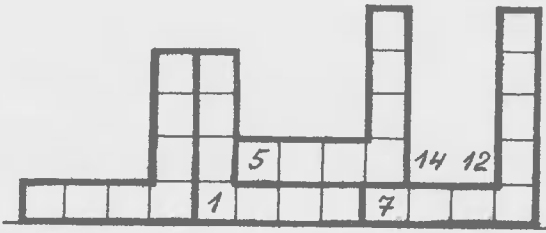


Рис 26.

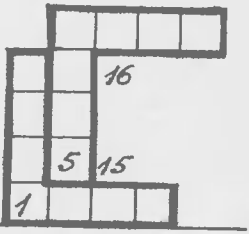


Рис 27.

Она может быть покрыта четырьмя способами (см. рис. 24,25,26,27) В первом случае (рис.24) клетка 6 покрывается единственным способом; при этом клетка 13 не может быть покрыта (Здесь используется, что $n>3$!). Остальные три случая легко рассмотреть теми же метода-

ми при помощи рис. 25, 26, 27.

Итак, задачи 8 а), б) решены для случая $m=n$.

В общем случае решение авторам неизвестно.

в) Плоскость можно замостить уголками $m \times n$ при всех m и n . Способ ясен из рис. 28.

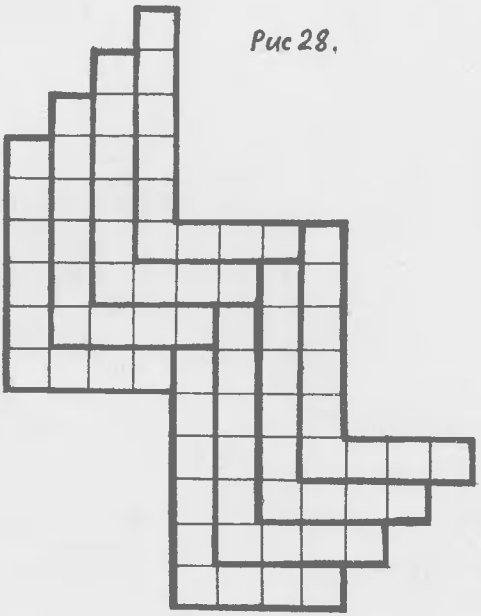
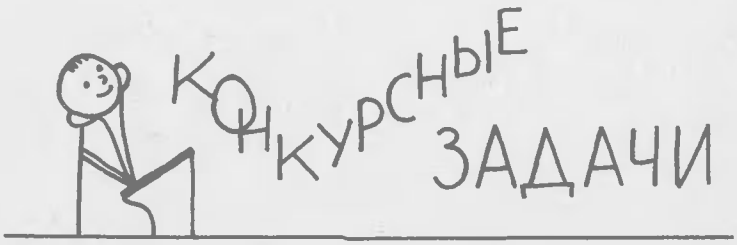


Рис 28.



В конкурсе могут принимать участие учащиеся всех московских школ. Решения следует представлять в письменном виде руководителям групп ВМШ или присылать по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, комн. 12-22, Б.В.Григорьеву.

7 класс

Задача № 1. Пусть число $M = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$ простое. Докажите, что тогда и n простое. Верно ли обратное утверждение?

Задача № 2. Можно ли склеить из бумаги многогранник с 13 гранями так, чтобы каждая грань была либо треугольником, либо пятиугольником, либо семиугольником?

Задача № 3. Две карты Москвы выполнены в разном масштабе, одна из них в 3 раза больше другой. Меньшая карта как-то наложена на большую. Доказать, что карты можно проткнуть иглой так, что на каждой карте игла покажет одинаковые пункты.

Задача № 4. Доказать, что плоскость можно покрыть без пропусков четырехугольниками, равными данному (не обязательно выпуклому).

Задача № 5. Доказать, что в кубический аквариум с ребром

10 м. можно поместить 100 амёб так, чтобы каждая касалась каждой (амёба может принимать любую форму).

8 класс

Задача № 1. Доказать, что для любого простого p, не равного двум и пяти, существует число, состоящее из одних единиц, делящееся на это число p.

Задача № 2. Из середин сторон треугольника ABC во внешнюю сторону восставлены перпендикуляры и на них отложены отрезки, равные половине соответствующей стороны треугольника ABC. Концы этих перпендикуляров соединены с противоположными вершинами треугольника ABC. Доказать, что три полученные таким образом прямые пересекаются в одной точке.

Задача № 3. а) Доказать, что для любых целых чисел a, b найдутся такие целые числа x, y, что $2(a^2+b^2) = x^2+y^2$.

б) Доказать, что для любых целых чисел a, b, c, d найдутся такие целые числа x, y, m, n, что

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) = x^2+y^2+m^2+n^2.$$

Задача № 4. а) Разбить плоскость на выпуклые семиугольники так, чтобы в каждой вершине сходились три семиугольника.

б) Разбить плоскость на восьмиугольники так, чтобы в каждой вершине сходились четыре восьмиугольника.

в) Можно ли разбить плоскость на выпуклые восьмиугольники?

9 - 10 класс

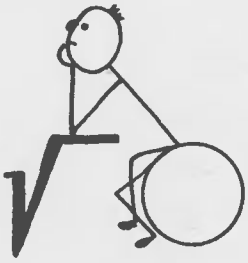
Задача № 1. Доказать, что всякая плоская замкнутая ломаная является проекцией некоторой несамопересекающейся пространственной замкнутой ломаной с тем же числом сторон.

Задача № 2. 870 гранитных глыб нужно вынуть из карьера. Доказать, что если каждая глыба весит не более 8 тонн, то для перевозки достаточно 17 платформ. грузоподъемностью по 58 тонн каждая.

Задача № 3. На сторонах произвольного четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты и взяты их центры А,В,С,Д. Доказать, что отрезки АС и ВД равны и перпендикулярны.

Задача № 4. 9 многоугольников площади 1 кв.м. расположены внутри круга площади 5 кв.м. Доказать, что по крайней мере 2 из них имеют общую часть, площадь которой 1/9 кв.м.

Задача № 5. В треугольнике АВС даны точки М и К. Пройти из М в К кратчайшим путем, побывав на каждой стороне треугольника.



XXX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

М. ДУНСКАЯ.

В марте 1967 года была проведена XXX традиционная Московская математическая олимпиада УП – X классов. Олимпиада проходила в три тура.

В первом (районном) туре олимпиады приняло участие около 14000 школьников, во втором – около 3500 человек, а заключительном, третьем туре – около 600 ребят.

Ниже приводятся условия и решения задач П тура олимпиады. Задачи Ш тура будут опубликованы в следующем выпуске "Математической школы" вместе со списками победителей.

П ТУР

УШ класс

Задача № 1. Существуют ли два последовательных натуральных числа, таких что сумма цифр каждого из них делится на 125? Найти наименьшую пару таких чисел или доказать, что их не сущест-

вует.

Решение. Пусть первое из искомых чисел n, тогда второе $n+1$. Обозначим суммы цифр чисел n и $n+1$ соответственно через $S(n)$ и $S(n+1)$.

Если число n не оканчивается на 9, то $S(n+1) = S(n)+1$, поэтому $S(n)$ и $S(n+1)$ оба делиться на 125 не могут; значит, число n имеет в качестве последних цифр некоторое количество девяток.

Пусть $n = \overline{xy\ldots z\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ раз}}}$ *), причем $z \neq 9$. Тогда $n+1 = \overline{xy\ldots(z+1)\underbrace{00\cdots0}_{k\text{ раз}}}$, поэтому $S(n) = x+y+\cdots+z+9k$; $S(n+1) = x+y+\cdots+z+1$.

Так как $S(n)$ и $S(n+1)$ делятся на 125, то их разность тоже делится на 125.

$$S(n) - S(n+1) = 9k - 1,$$ k -целое

Если $k < 14$, то $9k-1 < 125$, при $k = 14$ $9k-1 = 125$, следовательно, $k \geq 14$.

Заметим теперь, что число $S(n+1)$ делится на 125, $S(n+1) \neq 0$, поэтому $S(n+1) \geq 125$. Учитывая теперь, что все цифры числа $n+1$ не больше девяти, получим, что их должно быть не меньше четырнадцати $(13 \cdot 9 = 117 < 125)$. Итак, среди цифр числа n не меньше четырнадцати девяток на конце и не меньше четырнадцати цифр перед этими девятками. Попробуем теперь подобрать число n так, чтобы у него было двадцать восемь цифр. (нам ведь нужно наименьшее возможное n).

---

*) $\underbrace{\overline{abc\ldots de}}_{k\text{ цифр}} = a\cdot10^{k-1} + b\cdot10^{k-2} + c\cdot10^{k-3} + \cdots + d\cdot10 + e.$

Ясно, что из четырнадцати первых цифр по крайней мере двенадцать – девятка (так как $9\cdot 11+3\cdot 8+1=5(n+1)=124<125$), а остальные – либо две восьмерки, либо семерка и девятка, но так как $z\neq 9$ и учитывая, что мы ищем наименьшее n , находим, что искомое число

$$n=\underbrace{899\ldots 9}_{12\text{ раз}}\,\underbrace{899\ldots 9}_{14\text{ раз}}.$$

Задача № 2. На стороне AB треугольника ABC или на ее продолжении найти точку M, такую, что сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников ACM и BCM, была минимальной.

Решение. Пусть M – произвольная точка стороны AB. Построим окружности с центрами O_1 и O_2 , описанные около треугольников ACM и CMB соответственно. Тогда из неравенства треугольника следует, что $2r_1\geq AC$; $2r_2\geq BC$, поэтому $2(r_1+r_2)\geq AB+BC$. Равенство в этом соотношении будет тогда, когда O_1 лежит на AC, а O_2 – на BC, то есть когда треугольники ACM и BCM – прямоугольные, отсюда следует, что искомая точка M – основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C.

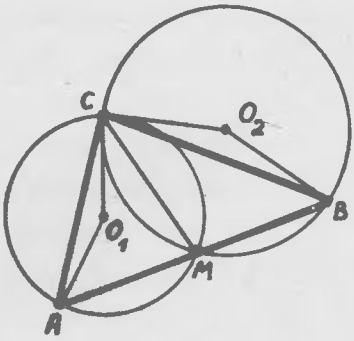


Рис 29.

Задача № 3. Для зашифровки телеграфных сообщений требуется разбить всевозможные "слова" – произвольные наборы точек и тире – на две группы так, чтобы любые два слова одной группы отличались не менее, чем в трех разрядах. Указать способ такого

разбиения или доказать, что его не существует.

Решение. Рассмотрим три слова:

„•••" ; „•—•" ; „——•" .

Если допустить, что искомое разбиение существует, то по крайней мере два из этих слов попадут в одну группу, но эти слова отличаются только в двух первых разрядах, поэтому нужного разбиения не существует.

Задача № 4. Дан треугольник АВС. Найти геометрическое место точек М, таких что треугольники АВМ и ВСМ – равнобедренные.

Решение. Для того, чтобы треугольник АВМ был равнобедренным, нужно, чтобы точка М лежала либо на перпендикуляре к отрезку АВ, проведенном через его середину (тогда $AM=BM$), либо на окружности радиуса АВ с центром в точке А (тогда $AB=AM$), либо на окружного того же радиуса с центром в точке В (тогда $AB=BM$). Аналогично рассматриваются олучаи, когда равнобедренным будет треугольник ВСМ.

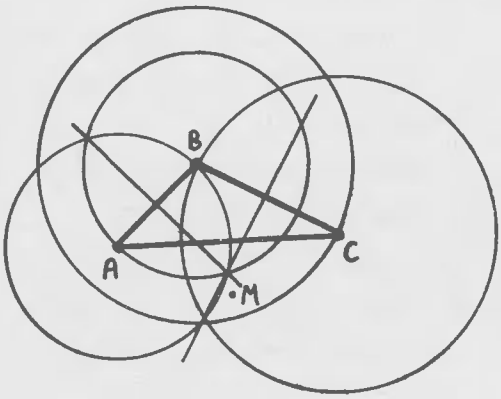


Рис 30.

Искомому геометрическому месту принадлежат все точки пересечения каждой линии первой группы с каждой линией второй группы.

Пусть сначала $AB \neq BC$. Тогда две окружности с центром в точке В будут концентрическими и, следовательно, не пересекутся.

Подсчитаем, сколько точек пересечения дает перпендикуляр, проведенный через середину АВ. Он пересекает второй перпендикуляр, а также окружности второй группы, каждую не более, чем в двух точках, того он дает не больше пяти точек. Перпендикуляр, проведенный через середину ВС, дает не более четырех новых точек.

Окружность с центром в точке А пересекает окружности второй группы не более, чем в четырех точках, окружность первой группы с центром в В. пересекает окружность с центром в С не более, чем в двух точках. Итак, если $AB \neq BC$, геометрическое место состоит не более, чем из 15 точек, которые отыскиваются указанным выше способом.

Если же $AB = BC$, то окружности с центром в В сольются и дадут еще целую окружность, принадлежащую искомому геометрическому месту.

Исследование всех возможных случаев предоставляем читателю.

Задача № 5. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну - не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

Решение. Пусть у Остапа было S слонов, пусть он давал каждому члену профсоюза x слонов, а не члену – y слонов. Тогда $28x+37y=S$. Это уравнение определяет на плоскости xy прямую. Так как, по условию задачи, имеется лишь один способ раздачи, то в первой четверти $(x>0, y>0)$ на нашей прямой лежит лишь одна точка с целочисленными координатами – точка $M(x_0, y_0)$.

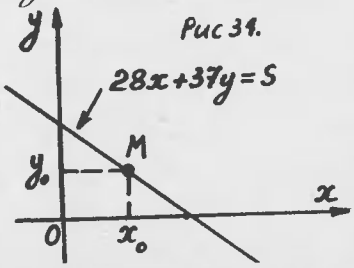


Рис 34.

Легко видеть, что ближайшая слева к М точка с целочисленными координатами на нашей прямой есть точка $M_1(x_0-37; y_0+28)$, а слева – точка $M_2(x_0+37, y_0-28)$. Чтобы эти точки не попали в первую четверть, необходимо, чтобы $\begin{cases} x \le 37 \\ y \le 28 \end{cases}$

С возрастанием x и y S растет, поэтому нам нужны максимально возможные x и y : $x=37$; $y=28$. Тогда $S_{max}=2\cdot 37\cdot 28=2072$.

IX класс

Задача № I. Имеется лабиринт, который состоит из n окружностей, касающихся прямой e в точке А. Все окружности расположены по одну сторону от этой прямой, а их длины составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Два человека в разное время начали ходить по лабиринту. Их скорости одинаковы,

а направления движения различны. Каждый из них проходит все окружности по порядку и, пройдя наибольшую, снова идет в наименьшую Доказать, что они встретятся.

Решение. Пусть $\ell_1, \ell_2, \dots \ell_n$ – длины окружностей, причем $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \dots < \ell_n$ и пусть в некоторый момент времени первый человек вошел в окружность ℓ_n.

а) Если второй человек в это время находился где-то в ℓ_n, то они встретятся, так как идут навстречу друг другу.

б) Пусть второй человек находится где-то вне ℓ_n.

$$\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_{n-1}=\ell_1+2\ell_1+2^2\ell_1+\dots+2^{n-1}\ell_1=$$

$$=\ell_1(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})=\ell_1(2^n-1)<\ell_1\cdot 2^n=\ell_n,$$

поэтому пока первый человек пройдет ℓ_n, второй успеет пройти все меньшие окружности и войдет в ℓ_n, а тогда они встретятся, так как идут навстречу друг другу.

Задача № 2. Можно ли разрезать квадратный торт на 9 равновеликих частей таким способом: выбрать внутри квадрата две точки и соединить каждую из них прямолинейными разрезами со всеми четырьмя вершинами квадрата? Если можно, то какие две точки надо выбрать?

Решение. Пусть M – одна из нужных точек и площадь квадрата равна I.

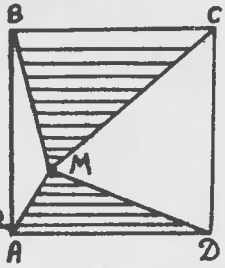


Рис 32

Тогда $S_{\Delta AMD}+S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}$

Треугольники АМД и ВМС состоят из целого числа кусков, на которые разрезан торт, площадь каждого куска $\frac{1}{9}$.

Пусть в оба треугольника помещаются k таких кусков. Тогда $k \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$, то есть $9 = 2k$. Получили противоречие: 9 оказалось четным числом, значит, так разрезать торт нельзя.

Задача № 3. См. задачу № 2 для 8 кл.

Задача № 4. Чему равна максимальная разность между соседними числами из числа тех, сумма цифр которых делится на 7?

Решение. Будем называть числа, оумма цифр которых делится на 7, 7 - числами.

Если 7 - число оканчивается на 0, I или 2, то среди чисел, отличающихся от него только последней цифрой, найдется еще одно 7 - число, оно будет оканчиваться на 7, 8 или 9. В этом случае разность между соседними 7- числами равна 7.

Если же взять 7 - число, оканчивающееся на 3, то среди чисел, отличающихся от него только последней цифрой, 7 - чисел уже не будет, а ближайшее 7 - число больше взятого на I3.

Легко показать, что это максимальная возможная разность; она реализуется для чисел 993 и I006.

Задача № 5. Имеется I20 - значное число. Его первые I2 цифр переставляются всевозможными способами. Из полученных таким образом I20 - значных чисел наугад выбирают I20 чисел. Доказать, что их сумма делится на I20.

Решение. Так как все выбранные числа имеют одинаковые цифры, то их остатки при делении на 3 одинаковы, поэтому эти числа можно записать в виде $3n_i + k$, $i = 1, \ldots, 120$. Сумма выбранных чисел равна $(3n_1 + k) + (3n_2 + k) + \cdots + (3n_{120} + k) =$

$= 3(n_1+n_2+\dots+n_{120}+40k)$,

то есть сумма чисел делится на 3. Докажем, что она делится и на 40.

Запишем каждое из выбранных чисел так:

$$\overline{abc\dots efm} = \overline{abc\dots 000} + \overline{efm}. \qquad (1)$$

У всех наших чисел три последние цифры одинаковы, поэтому все вторые слагаемые в формуле (I) равны.

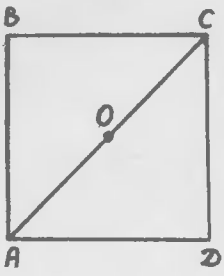
Сложим теперь все наши числа, записанные в виде (I). Сумма всех первых слагаемых кончается тремя нулями, поэтому делится на 40, сумма вторых слагаемых равна $120 \cdot \overline{efm}$, поэтому она тоже делится на 40. Задача решена.

X класс

Задача № I. Внутри квадрата расположено k точек $(k>2)$. На какое наименьшее число треугольников нужно разбить квадрат, чтобы внутри каждого треугольника находилось не более одной точки?

Решение. Треугольников должно быть не меньше, чем k. Покажем, что k треугольников может не хватить. Пусть k точек расположено на отрезке OC. Если из точки A выходит хотя

Рис 33.



бы одна из сторон разбиения, то треугольник, образованный этой стороной и лежащей с ней по одну сторону от AC стороной квадрата, не будет содержать ни одной точки, то есть число треугольников будет больше k. Если же из вершины A не выходит ни одной стороны

треугольника, то в прямоугольном треугольнике с вершиной прямого угла в точке А, лежащем целиком ниже ВД, нет ни одной точки.

Докажем теперь, что $k+1$ треугольника достаточно. Доказательство проведем по индукции.

Пусть даны 3 точки. Соединим эти точки. Пусть 2 из прямых, соединяющих точки, совпадают с диагоналями квадрата, тогда разбиение будет таким, как показано на рис 34. Если две из указанных прямых не совпадают с диагоналями квадрата, то хотя бы из одной вершины квадрата можно провести два луча, разделяющих эти точки, см. рис 35, читатель без труда проверит это утверждение.

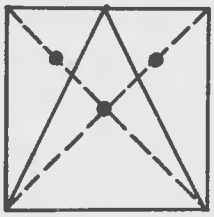


Рис 34.

Предположили, что для $k-1$ точки нашлось разбиение квадрата на k треугольников. Добавим k -ую точку.

а) Если она попала внутрь какого-то треугольника прежнего разбиения, то найдется прямая, проходящая через какую-нибудь вершину этого треугольника и разделяющая новую точку и ту, которая уже была в треугольнике, то есть получится нужное разбиение для k точек (если в указанном треугольнике не было старой точки, то разбиение остается старым).

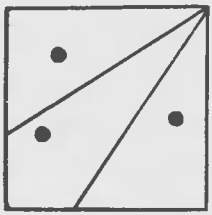


Рис 35.

б) Пусть новая точка попала на сторону какого-нибудь треугольника старого разбиения. Если эта сторона

не является диагональю квадрата, то можно немного изменить разбиение так, чтобы получился случай а), для этого один из концов рассматриваемой стороны треугольника, не являющийся вершиной квадрата, надо немного сместить. В случае, если k-ая точка попала на диагональ квадрата, являющуюся одной из оторон треугольника разбиения поотупим так: заменим диагональ близкой к ней ломаной так, чтобы треугольник превратился в выпуклый четырехугольник и чтобы вторая диагональ этого четырехугольника не проходила ни через одну из имеющихся внутри 2-ух точек (этого можно добиться выбором четвертой вершины); тогда, проведя эту вторую диагональ, получим искомое разбиение.

Задача № 2. Доказать, что внутри круга радиуса I нельзя найти более пяти точек, все попарные расстояния между которыми больше единицы.

Решение. Предположим, что нашлось 6 точек, обладающих требуемым свойством. Соединим их о центром круга О (центр, очевидно, не входит в число этих точек). Мы получили 6 углов. Ясно, что один из этих углов не превышает 60^0. Рассмотрим этот угол. Обозначим две из наших шести точек, лежащие на его сторонах, через А и В и рассмотрим треугольник АОВ. Очевидно, $AO<1$; $BO<1$ (1).

Так как $\angle AOB \leq 60^\circ$, то один из углов ОАВ и ОВА не меньше 60^0, значит, против этого угла лежит сторона, не меньшая, чем АВ, но из (I) следует, что тогда $AB<1$, то есть мы получили противоречие.

Задача № 3. Доказать, что уравнение

$$19x^3 - 17y^3 = 50$$

не имеет решения в целых числах.

Решение. Легко проверить, что куб целого числа может при делении на 9 дать в остатке лишь 0, I или -I. Учитывая, что I9 дает при делении на 9 остаток I, I7 дает -I и что при умножении чисел остатки от их деления на одно и то же число умножаются, а при сложении - складываются, получим, что левая часть уравнения при делении на 9 может дать в остатке 0,I,-I,2 или -2. Правая же часть уравненин дает при делении на 9 остаток 5 или -4. Отсюда следует, что уравнение в целых числах не решается.

Задача № 4. В бесконечно большой каравай, занимающий все пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра 0,I. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Доказать, что найдется неразрезанная изюминка.

Решение. Пусть проведено n плоскостей. Окружим каждую из них полосой ширины 2. Тогда, если в пространстве найдется хотя бы одна точка, не попавшая ни в одну из полос, то утверждение задачи будет доказано, так как если около любой точки описать шар радиуса 2, то в него обязательно попадет несколько изюминок.

Покажем, что точки, не покрытые полосами, есть. Возьмем шар радиуса $r = 4n$ (n -число плоскостей). Объем этого шара $V = \frac{4^4 \cdot \pi n^3}{3}$. Каждая полоса вырезает в нем кусок объемом не больше, чем $\pi r^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot \pi n^2 \cdot 2 < 4^3 \cdot \pi n^2$. Все полосы вырежут куоок объемом, не большим, чем $4^3 \pi n^3$, что меньше, чем объем всего шара. Поэтому в выбранном шаре найдутся точки, не попавшие ни в одну из полос.

Замечание. Доказываемое в задаче утверждение верно для

изюминок любого радиуса $r>0$.

Задача № 5. Из первых k простых чисел: $2,3,5,\dots,$ p_k $(k>4)$ составляют всевозможные произведения, в которые каждое из данных чисел входит не более одного раза, например, $3\cdot5\cdot7\cdot p_{k-1}$, $7\cdot p_k$, $3\cdot7$ и т.д.
Обозначим сумму всех таких произведений через S .
Доказать, что $S+1$ разлагается в произведение более, чем $2k$ простых, не обязательно различных, сомножителей.

Решение. Рассмотрим любые действительные числа $a_1,a_2,\dots,a_k$
Покажем по индукции, что сумма всевозможных произведений этих чисел (обозначим ее S_k) равна $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)-1$
(каждое из чисел a_k входит в каждое из произведений не более одного раза).

$$S_2=a_1+a_2+a_1a_2=(a_1+1)(a_2+1)-1.$$

Пусть при $k=m$, $S_m=(a_1+1)\cdots(a_m+1)-1.$

Разобьем все произведения $m+1$ чисел на 2 группы: к первой группе отнесем все произведения, в которые не входит a_{m+1} , их сумма равна S_m ; ко второй группе отнесем все остальные произведения, их сумма равна $a_{m+1}\cdot S_m+a_m$; тогда

$$S_{m+1}=S_m+a_{m+1}\cdot S_m+a_{m+1}=S_m(a_{m+1}+1)+a_{m+1}=$$
$$=(a_{m+1}+1)\left[(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_m+1)-1\right]+a_{m+1}=$$
$$=(a_1+1)\cdots(a_{m+1}+1)-a_{m+1}-1+a_{m+1}=$$
$$=(a_1+1)\cdots(a_{m+1}+1)-1,$$

что и требовалось.

Теперь расомотрим числа $p_1, p_2, \dots, p_k$.

$$S+1 = (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1) = 3\cdot 4\cdot 6\cdots(p_k+1).$$

Очевиднс, что (p_i+1) - четное число для $i>1$, поэтому $S+1$ разлагаетсн на $2(k-1)+1 = 2k-1$ сомножителей. Но $k>4$, поэтому среди (p_i+1) есть числа 8 и I2, которые разлагаются на 3 множителя, поэтому $S+1$ разлагается не меньше, чем на $2k+1$ сомножителей.

ГОТОВИМСЯ В ВУЗ

По традиции мы публикуем материалы вступительных экзаменов в ведущие вузы страны.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся летом 1967 года на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова. На экзамен отводилось 4 астрономических часа.

Вариант 51

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$2\left|\lg(ax)\right|\cdot \lg_x 10 = (4\lg a - 3)\cdot \lg_{x^2} 10 - \frac{1}{2}\lg x$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместительностью 100 л. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной ее поверхности. При этом колба объемом в 1 л обходится в 1 руб. 25 коп. и в этом случае стоимость труда составляет 20 % стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренеб-

режимо малой).

Хватит ли на выполнение работы 100 рублей?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$\cos 2(t+x)+2\sin(t+x)\cos y-\frac{1}{2}(\cos y-1)^2-\sin x$$

при всяком значении t меньше $\frac{1}{2}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Основание правильной треугольной пирамиды касается шара с центром в вершине пирамиды, причем внутри пирамиды содержится 1/10 всей поверхности шара. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

Вариант 52

1. Указать вое значения a, при которых уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a\cdot\left|\log_a\frac{x}{2}\right|=\log_{a^2} 2\cdot\log_{\sqrt{x}} a^2-\log_a\sqrt{x}$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Поезд, следующий из пункта А в пункт В, делает по пути некоторое количество остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой последующей – на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 50 паосажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт В прибывает менее 12 паосажиров, если из пункта А их выезжает 462?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$\sin^2(t+x)+\sin(t+y)+\sin(t+2x-y)+\frac{1}{4}$

положительно при всяком значении t , и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, а сторона основания - I. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара, центр которого расположен в вершине пирамиды, а радиус равен I ?

Вариант 53

I. Указать все значения a , при которых уравнение

$$\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10 \cdot \left(\lg 10a + \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right)$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 000 кв.м. Затраты на постройку одного дома, имеющего N кв.м. жилой площади, складываетоя из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительноство дома на I600 кв.м. обходится в I84,8 тыс.рублей, причем в этом случае стоимость наземной части оставляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.

3. На координатной плоскости указать все точки с координатами для каждой из которых существует хотя бы одно значение t , при котором выражение

$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y)(\sin 2x - 1)^2$

больше I, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. В центре шара помещена вершина правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна радиусу шара, а объем относится к объему шара, как $3 : 16\pi$. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара?

Вариант 54

I. Указать все значения a , при которых уравнение

$$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a \left| a + \log_a x \right| = a \log_{fx} a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Некоторое предприятие несет убытки, составляющие 31000 руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составляет 25 000 рублей в год, а дополнительные расходы окажутся равными 5 000 рублей при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на I0 000 рублей в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Можно ли указанным способом сделать предприятие рентабельным?

3. На координатной плоскости указать вое точки с координатами (x, y) , для каждой из которых существует хотя бы одно значение t , при котором выражение

$$\cos(t+3x+y) - \cos(t+x-y) - \sin^2(t+2x)$$

больше $\frac{1}{4}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Прямоугольник $ABCD$ служит основанием пирамиды $SABCD$, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания и больше I, а двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SBC, равен $\frac{\pi}{4}$. Найти часть объема пирамиды, содержащуюся в шаре радиуса 1 с центром в точке S.

Вариант 55

I. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \left| \log_{a^2} \frac{x}{2} \right| + \log_a x = \log_{a^2} 4 \cdot \log_{\sqrt{x}} a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Мастерская производит закрытые резервуары кубической формы. Время монтажа одного резервуара, пропорциональное квадрату его поверхности, в случае резервуара объемом 8 л составляет I мин. 40 сек. на каждые I0 кв.см поверхности. Может ли мастерская успеть за 20 часов изготовить такое количество одинаковых резервуаров, чтобы их общая вместимость составила 64 тыс.л?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x,y) таковы, что выражение

$$(2\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y)\cos x \cos y + 1 + \cos x - \cos y + \cos 2t$$

положительно при всяком значении t, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Найти отношение полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды к поверхности шара, центр которого расположен в

вершине пирамиды и который касается ее основания, зная, что вне пирамиды находится $\frac{5}{7}$ поверхности шара.

Вариант 56

I. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_a x \cdot \left| \log_x a - \log_2 a \right| = \log_x (ax) - \log_2 a^2 + \log_a x \cdot \log_2 a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Автобус № I, на котором студент может доехать до своего института без пересадки, едет от его дома до института 2 часа I минуту. До института можно доехать также любым из автобусов № 2, № 3..., № К, однако, на автобус № Р можно пересесть только с автобуса № (Р – I). Маршруты этих автобусов таковы, что, доехав до института на одном из них, студент проведет в дороге (не считая пересадок) время, обратно пропорциональное числу использованных автобусов. Кроме того, на каждую пересадку ему придется потратить 4 минуты. Верно ли, что существует путь, при котором на дорогу уходит в общей сложности менее 40,I мин?

3. На координатной плоскости все точки с координатами (x,y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\sin^2 t \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t + 2(\cos 2x + \cos y)$$

отрицательно, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Высота пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит пря-

моугольник $ABCD$, проходит через точку пересечения его диагоналей. Шар с центром в точке S касается основания пирамиды, причем внутри пирамиды находится $\frac{1}{5}$ его поверхности. Найти двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SBC .

ПОДП. К ПЕЧАТИ 29/IУ-68 Г. Л-95710. Ф.60x90/16
ФИЗ.П.Л. 4,0. УЧ.-ИЗД.Л. 2,40. ЗАК. 1418. ТИР.1000
ЦЕНА 7 КОП.

ОТП. НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД-ВА МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.